

# ESTRUCTURAS MEMBRANALES DE ESPESOR NO UNIFORME

ING. JUAN SNITCOFSKY

Las siguientes consideraciones son aplicables a aquellas cáscaras de hormigón armado que, supuestas en régimen membranar, estén sometidas a la acción de cargas verticales permanentes variables de punto a punto, conforme a una determinada ley de variación. El presente trabajo tiene por objeto precisamente el establecimiento de dicha ley, de modo tal de obtener un régimen de cargas capaz de generar en la membrana un cuadro de esfuerzos internos impuesto de antemano.

El problema presenta cierta analogía formal con el procedimiento empleado en la teoría de los arcos, que consiste en hallar el diagrama de cargas cuyo antifunicular coincide con el eje del mismo arco, de modo de anular los momentos flectores provocados en la pieza por ese y sólo ese estado de cargas.

El criterio que se expondrá parte de las premisas que deben cumplir las membranas para que puedan ser aplicadas las ecuaciones de equilibrio debidas a A. Pucher, restringidas al caso de cargas verticales, en nuestro caso cargas permanentes. Para prevenir el efecto de sobrecargas accidentales que pudieran actuar sobre toda la superficie en forma simultánea —hipótesis de adopción frecuente en el cálculo de estructuras membranales— se pueden mayorar adecuadamente los esfuerzos hallados, o bien minorar las tensiones de servicio tanto del hormigón como de la armadura, en la proporción requerida por cada caso particular.

Para materializar el régimen de cargas necesario a los fines propuestos, se podrá recurrir a uno de los siguientes procedimientos constructivos:

- Variar en cada punto el espesor de la membrana.
- Conservar dicho espesor constante, pero agregando un relleno inerte de espesor variable en cada punto, conforme al peso total requerido
- Combinar a voluntad los dos procedimientos anteriores.

En lo que sigue, y sólo por razones de comodidad, no aludiremos más que al primero de estos recursos, entendido que puede optarse por cualquiera de los otros dos, sin perjuicio de la validez del resultado perseguido.

El método operativo al que arribaremos no requiere la resolución de ecuaciones diferenciales, ni la determinación de incógnitas por diferencias finitas, o la confección y puesta a punto de programas para computación. Estas tareas, en algunos casos, pueden llegar a ser tan arduas, que con frecuencia desalientan el empleo de formas estructurales inéditas, particularmente cuando se trata de obras de magnitud reducida o que no han de construirse repetidamente. El criterio expuesto aquí sólo exige operaciones matemáticas muy sencillas, de manejo habitual en la práctica ingenieril, y en esto entendemos estriba parte de su utilidad, por cuanto permite explorar en forma rápida las posibilidades de una forma geométrica dada, obteniéndose de inmediato una información intuitiva de su

comportamiento. Podrán así modificarse por vía tentativa y con suficiente agilidad, los diversos parámetros que definirán el equilibrio, ya sea la forma de la cáscara o de su contorno, las condiciones de borde, la posición de la estructura en el espacio, etc.

Por otra parte, y dado que el plexo tensional, dentro de ciertos límites, puede ser elegido por anticipado, los esfuerzos de membrana pueden disponerse de manera de eliminar determinados efectos sobre los bordes, o contribuyendo a equilibrar el peso propio de las nervaduras portantes.

El conjunto de parámetros que puede variarse a voluntad, aún para una misma cáscara, conduce a un número ilimitado de combinaciones constructivas. Por ello, las resoluciones numéricas que se incluyen, no pretenden sino brindar algunos elementos de juicio para facilitar las comparaciones con estructuras conocidas.

Sea la superficie definida por la función:

$$z = f(x, y)$$

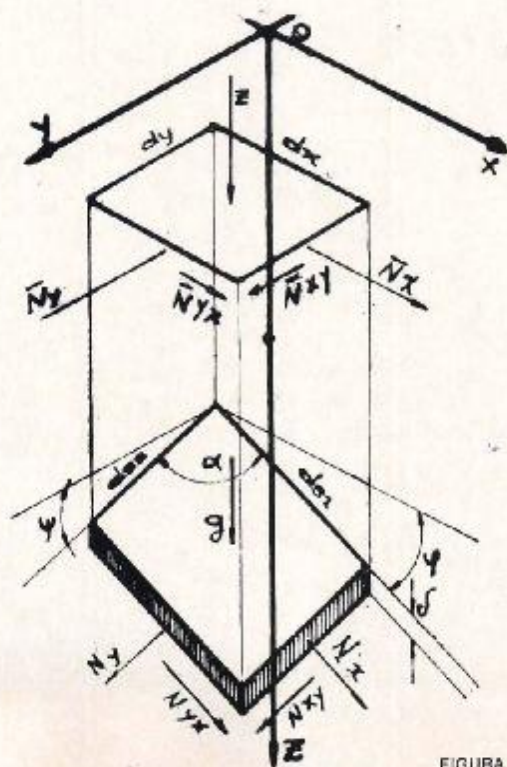


FIGURA 1

referida a una terna ortogonal X, Y, Z, (fig. 1). De dicha superficie se ha aislado un elemento de membrana de lados  $ds_1$  y  $ds_2$  y de espesor  $\delta$ , siendo  $g$  su peso y  $\gamma$  el peso específico del material considerado.

Los demás parámetros consignados en la figura tienen el significado corriente que les asigna la teoría membranal.

El peso de dicho elemento de cáscara, por unidad de superficie proyectada sobre el plano Y-O-X valdrá:

$$Z = \frac{g}{dx dy} = \frac{dA}{dx dy} \gamma \delta \quad (1)$$

siendo  $dA$  el área del cuadrilátero elemental de lados  $ds_1$  y  $ds_2$ . Si llamamos:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

sabemos que:

$$dA = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

que reemplazada en (1):

$$Z = \gamma \delta \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad (2)$$

Por otra parte, el sistema de ecuaciones generales para el equilibrio de las cáscaras, en el caso de cargas verticales se reduce a:

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3b)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{N}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{N}_{xy}}{\partial x \partial y} = -Z \quad (3c)$$

$$\bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx} \quad (3d)$$

Si convenimos en llamar:

$$r = \sqrt{1 + p^2 + q^2}; \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

obtendremos, eliminando  $Z$  de las expresiones (2) y (3):

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (4b)$$

$$r \cdot \bar{N}_x + t \cdot \bar{N}_y + 2s \cdot \bar{N}_{xy} = -\gamma \delta r \quad (4c)$$

Sistema de tres ecuaciones diferenciales con cuatro funciones incógnitas, a saber:

$$\bar{N}_x; \quad \bar{N}_y; \quad \bar{N}_{xy}; \quad \delta;$$

Será posible entonces atribuirle a una de ellas un valor arbitrario, función a su vez de  $x$  e  $y$ .

En el presente desarrollo nos limitaremos al examen de un

caso muy particular, que se obtiene introduciendo en (4) la función arbitraria:

$$\bar{N}_{xy} = C_1 = \text{constante}$$

que aún siendo la más sencilla que pueda darse, permite el análisis de una gran variedad de casos, algunos de los cuales se exponen más adelante.

Siendo constante  $\bar{N}_{xy}$ , son nulas sus derivadas, y la ecuación (4a) se reduce a:

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial x} = 0$$

que integrada resulta:

$$\bar{N}_x = C_2(y)$$

o sea que  $\bar{N}_x$  es igual a su constante de integración. El valor  $(y)$  entre paréntesis significa que si bien  $\bar{N}_x$  no es función de  $x$ , puede serlo de la variable  $y$ . Análogamente:

$$\bar{N}_y = C_3(x)$$

que se obtiene de (4b).

Aquí como en el caso de resolución general de las ecuaciones de equilibrio, las condiciones de vínculo de la membrana permitirán determinar las constantes de integración.

Si ahora en la (4c) despejamos  $\delta$  obtendremos:

$$\delta = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{r}{\tau} \bar{N}_x + \frac{t}{\tau} \bar{N}_y + \frac{2s}{\tau} \bar{N}_{xy} \right) \quad (5)$$

y llamando:

$$\xi = \frac{r}{\tau}; \quad \eta = \frac{t}{\tau}; \quad m = \frac{s}{\tau};$$

la ecuación (5) podrá expresarse así:

$$\delta = -\frac{1}{\gamma} (\xi \cdot \bar{N}_x + \eta \cdot \bar{N}_y + 2m \cdot \bar{N}_{xy}) \quad (6)$$

$\xi$ ,  $\eta$  y  $m$  son las llamadas "Magnitudes Fundamentales de Segundo Orden" de la superficie analizada y caracterizan a la misma.

#### Ejemplos de aplicación.

##### I) Membranas de bordes paralelos a los ejes X-Y.

**Caso a).** Membranas sustentadas por resbalamiento puro.

Si la estructura en estudio está limitada por un contorno cuya proyección sobre el plano X-O-Y es un rectángulo de lados paralelos a los ejes X e Y, y si suponemos que los nervios de borde no son capaces de admitir más esfuerzos que aquéllos que les fueran aplicados según la dirección tangente a sus ejes, por carecer de rigidez en cualquier otro plano, la única forma de sustentación posible se verifica cuando:

$$\bar{N}_x = \bar{N}_y = 0$$

y la ecuación (6) será:

$$\delta = -\frac{1}{\gamma} 2m \cdot \bar{N}_{xy} \quad (7)$$

El esfuerzo de resbalamiento  $\bar{N}_{xy}$ , constante para todo punto de la cáscara, se puede fijar en forma arbitraria, con signo contrario a  $m$  porque de lo contrario el espesor  $\delta$  carecería de significado físico. Pero esta libertad de elección queda limitada

por la condición de que  $\delta$  no debe ser, en ningún punto, inferior al mínimo espesor que se establezca, sea por razones constructivas, por disposiciones reglamentarias o por cualquier otra consideración.

Para conocer las coordenadas del punto donde  $\delta$  adquiere su valor mínimo, basta con observar en la ecuación (7) que  $\delta$  y  $m$  son proporcionales, y por lo tanto el problema se reduce a la determinación de  $m$  mínimo. Para ello, en lugar del conocido procedimiento por derivación, hemos optado por el cálculo de los valores de  $m$  para distintos puntos de la membrana, por ejemplo para los vértices de una grilla, tarea que por otra parte es necesaria para conocer los respectivos valores de  $\delta$  en dichos vértices.

Obtenemos así un "diagrama de cargas" verticales, que produce en la membrana un estado de tensiones de resbalamiento puro, por cuanto son nulos los esfuerzos  $\bar{N}_x$  y  $\bar{N}_y$  paralelos respectivamente a los ejes X-Y. Por lo tanto, las tensiones principales están contenidas en planos verticales paralelos a las direcciones  $x = \pm y$ , y la estructura se comporta como un doble sistema de arcos comprimidos y traccionados de direcciones normales entre sí.

**Ejemplo Nro. 1.** Hypar, Asociación de cuatro sectores de paraboloide hiperbólico. Eliminación del empuje horizontal en los apoyos.

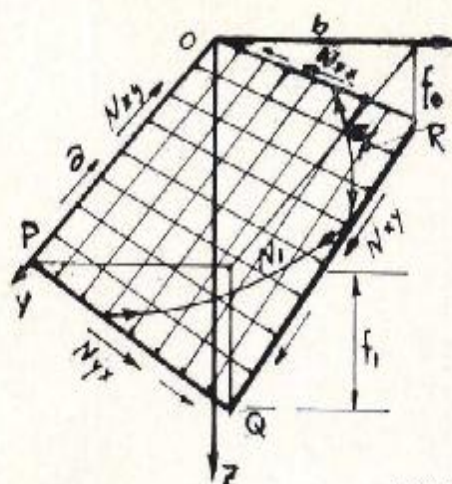


FIGURA 2

La fig. (2) representa un cuadrante de "hypar" de ecuación:

$$z = \frac{1}{18} x (18 - y)$$

siendo datos:

$$a = 18 \text{ m.} \quad b = 3 \text{ m.} \quad f_1 = 2 f_0 = 6 \text{ m.}$$

Derivando  $z$  se tiene,

$$p = 1 + \frac{y}{18}; \quad q = \frac{x}{18}; \quad s = \frac{1}{18}$$

resultando  $m$ :

$$m = \frac{1}{\sqrt{648 + 36y + y^2 + x^2}}$$

Valor con el cual se ha confeccionado el siguiente cuadro:

Punto	x	y	m	$\delta$ (cm)
1	0	0	0,0393	6,4
2	0	18	0,0248	4,1
3	3	0	0,0391	6,3
4	3	18	0,0247	4,-

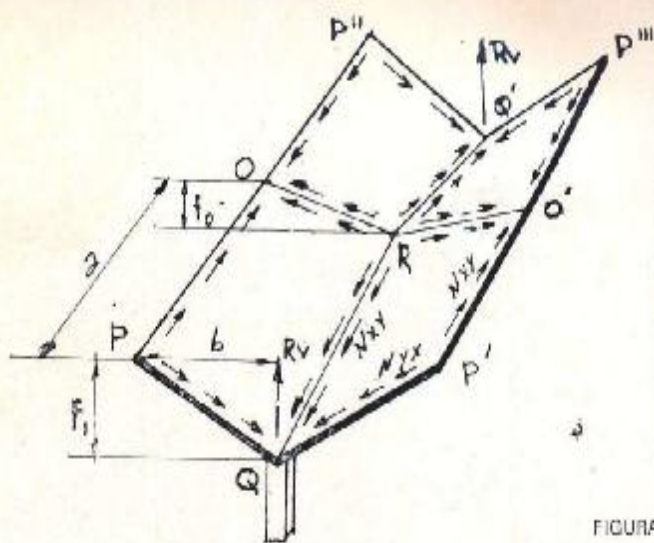


FIGURA 3

que se ha calculado por aplicación de la (7), de la cual se ha despejado el valor de  $\bar{N}_{xy}$ , que queda determinado con los valores  $m$  y  $\delta$  mínimos (subrayados en el cuadro anterior).

$$\bar{N}_{xy} = - \frac{2,4 \cdot 0,04}{2 \cdot 0,0247} = - 1,95 \text{ t/m}$$

En la fig. 3 se han reunido cuatro sectores de hypar, de modo de constituir un conjunto estructural que puede ser apoyado en los puntos Q y Q', en los cuales queda anulado todo empuje horizontal. En efecto, en los nudos O, R y O' es fácil comprobar que las resultantes de las fuerzas que convergen a ellos, se cancelan dos a dos. En cambio, al punto Q convergen las fuerzas que provienen de los bordes PQ y P'Q, cuya resultante es vertical y vale:

$$R_v = 2 \bar{N}_{xy} \cdot f_1$$

y que debe ser igual a la mitad del peso total de la estructura. Acotemos que la eliminación del empuje horizontal en los apoyos, con la consiguiente simplificación constructiva que ello implica, se debe al hecho de haber impuesto la condición:

$$f_1 = 2 f_0$$

que, cuando no existen solicitaciones normales a ninguno de los bordes, o sea cuando:

$$\bar{N}_x = \bar{N}_y = 0$$

basta para garantizar el equilibrio en los términos expuestos.

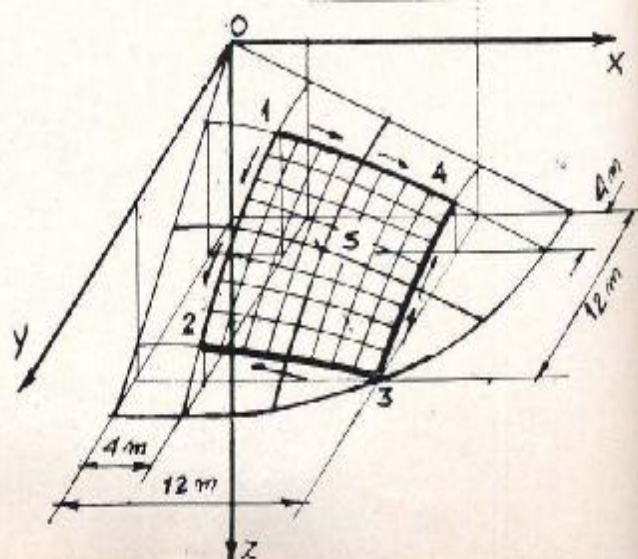


FIGURA 4

Si, por el contrario, a favor del espesor uniforme, se generan en los bordes Q R Q' y O R O' esfuerzos normales, aparecerán a lo largo de los mismos, esfuerzos verticales sin equilibrar y la relación enunciada entre  $f_1$  y  $f_0$  no basta en general para asegurar que el empuje horizontal en los apoyos sea nulo.

**Ejemplo N° 2 - Sector de superficie cónica (fig. 4).**

La ecuación que define la superficie cónica a la cual pertenece el sector de vértices 1-2-3-4 es:

$$z = 0,4 \sqrt{x^2 + y^2}$$

siendo sus derivadas:

$$p = \frac{0,4 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; q = \frac{0,4 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$s = \frac{-0,4 xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

expresiones que nos permiten calcular:

$$m = \frac{s}{r} = \frac{0,37 xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

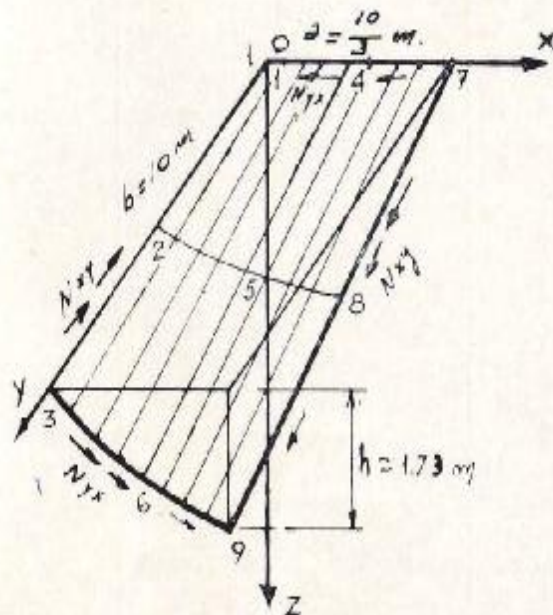
Como en el ejemplo N° 1, con ayuda de la expresión (7) se ha calculado el cuadro siguiente:

Punto	x	y	z	-m	$\delta$ (cm)	$\bar{N}_{xy}$ (t/m)
1	4	4	2,27	0,0325	15	5,50
2	4	12	5,05	0,0086	4	"
3	12	12	6,80	0,0108	5	"
4	12	4	5,05	0,0086	4	"
5	8	8	4,52	0,0162	7,5	"

**Ejemplo N° 3.**

Conoide de directriz sinusoidal. (fig. 5)

FIGURA 5



La superficie propuesta responde a la ecuación:

$$z = \frac{y}{5} \text{sen} \frac{\pi x}{10}$$

Con los datos de la fig. 5.

Procediendo como en los casos anteriores, se consignan los resultados a continuación:

$$p = \frac{\pi y}{50} \cos \frac{\pi x}{10} ; q = \frac{1}{5} \text{sen} \frac{\pi x}{10}$$

$$s = \frac{\pi}{50} \cos \frac{\pi x}{10}$$

$$\pi \cos \frac{\pi x}{10}$$

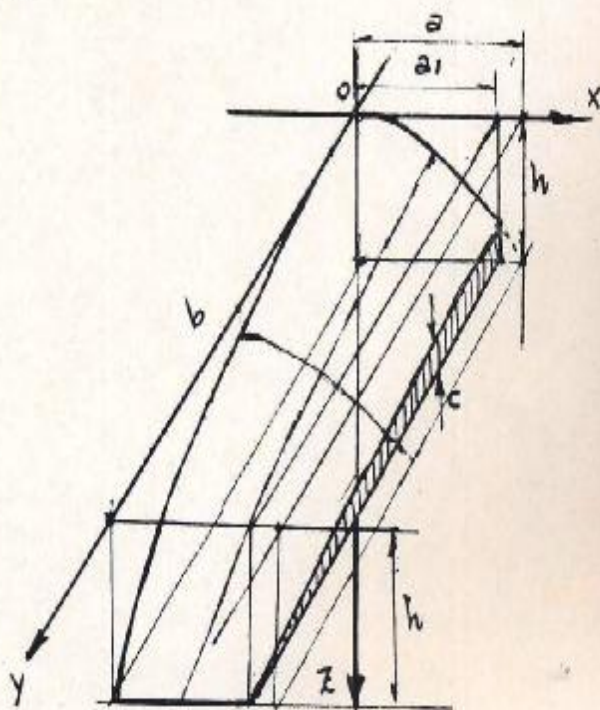
$$m = \frac{\pi \cos \frac{\pi x}{10}}{50 \sqrt{1 + \frac{\pi^2 y^2}{2.500} \cos^2 \frac{2\pi x}{10} + \frac{1}{25} \text{sen}^2 \frac{2\pi x}{10}}}$$

Punto	x	y	z	-m	$\delta$ (cm)	$\bar{N}_{xy}$ (t/m)
1	0	0	0	0,063	8,7	
2	0	5	0	0,060	8,3	
3	0	10	0	0,053	7,2	
4	10:6	0	0	0,054	7,4	
5	10:6	5	0,5	0,052	7,2	
6	10:6	10	1	0,047	6,5	-1,68
7	10:3	0	0	0,032	4,4	
8	10:3	5	0,86	0,030	4,1	
9	10:3	10	1,73	0,029	4	

**Caso b) -** Las direcciones principales coinciden con los ejes X-Y.

En este caso, impondremos la condición:  $\bar{N}_{xy} = 0$  para todo punto de la cáscara. Los bordes, siempre paralelos a los ejes X-Y, deberán tener rigidez adecuada para recibir los esfuerzos  $N_x$ - $N_y$ , y conducirlos hasta los apoyos.

FIGURA 6



El ejemplo siguiente se presta para introducir el peso propio de uno de los nervios de borde en las ecuaciones de equilibrio de la membrana.

**Ejemplo N° 4.** Superficie de cuarto orden, con carga debida al peso propio de una nervadura de borde.

La fig. (6) representa la ecuación:

$$z = h \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} \right)$$

siendo datos:

$h = 2,5 \text{ m.}; a = 5 \text{ m.}; b = 10 \text{ m.}; a_1 = 4,5 \text{ m}$   
resultando:

$$z = 2,5 \left( \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} - \frac{x^2 y^2}{500} \right)$$

La fig. (6a) representa al corte transversal de una cubierta constituida por un número indefinido de estos elementos, que tienen en común, dos a dos, un nervio de espesor  $d = 0,20 \text{ m}$  y de altura variable  $c$ , capaz de alojar en su interior un haz de tensores de acero. Se procura con este ejemplo transferir el peso de este nervio a las membranas adyacentes, sin alteración del régimen membranial supuesto.

La fig. (7) muestra una vista lateral de la cáscara, con su respectivo nervio. Como se ve en la misma, el peso de esa nervadura es variable y función de  $y$ .

Llamando  $g_n$  a ese peso,  $\gamma$  al peso específico y  $c$  a su altura, resulta:

$$g_n = \gamma d c$$

y a su vez:

$$c = h - z = h - h \left( \frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{a^2 y^2}{a^2 b^2} \right)$$

que reemplazando valores resulta:

$$c = 0,48 \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right)$$

por lo tanto:

$$g_n = 0,48 \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right) \cdot 2,4 \cdot 0,20$$

$$g_n = 0,23 \cdot \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right) \text{ t/m}$$

En la fig. 6a se observa que el peso  $g_n$  puede ser descompuesto según las tangentes a la cáscara, de modo de obtener dos fuerzas distribuidas sobre los bordes ( $N_x$ ), las que a su vez, proyectadas sobre el plano horizontal, nos suministran los valores de  $\bar{N}_x$  que deberemos imponer como condición de borde para equilibrar el peso  $g_n$ .

Recordando entonces que  $\text{tg} \varphi = P_1 / \bar{N}_x$  será:

$$\bar{N}_x = \frac{g_n}{2 \text{tg} \varphi} = \frac{g_n}{2pl}$$

donde se ha llamado  $pl$  al valor que toma  $p$  para  $x = a_1$

y reemplazado  $pl = \frac{a_1}{5} \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right) = 0,9 \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right)$

$$\bar{N}_x = \frac{0,23 \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right)}{0,9 \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right)^2} \approx 0,125 \text{ t/m}$$

$\bar{N}_x$  resulta así constante a lo largo de todo el borde, pero ello obedece a un caso particular de este problema, y no hay obstáculo alguno para asignarle un valor arbitrario variable  $y$ , función de  $y$ .

Derivando  $z$  y aplicando la ecuación (6) para  $\bar{N}_{xy} = 0$  obtendremos:

$$p = \frac{x}{5} \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right) \quad r = \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right) \frac{1}{5}$$

$$q = \frac{y}{20} \left( 1 - \frac{x^2}{25} \right) \quad t = \frac{1}{20} \left( 1 - \frac{x^2}{25} \right)$$

$$\delta = -\frac{1}{\gamma} (\epsilon_r \bar{N}_x + \eta \bar{N}_y) = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{r \bar{N}_x + t \bar{N}_y}{\tau} \right)$$

$$\bar{N}_y = -\frac{\tau \gamma \delta + r \bar{N}_x}{t}$$

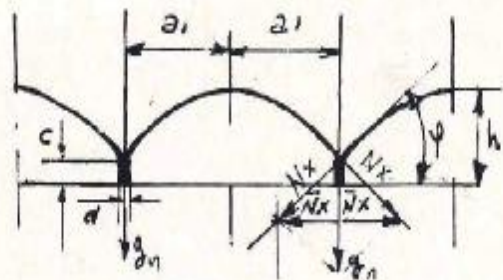


FIGURA 6a

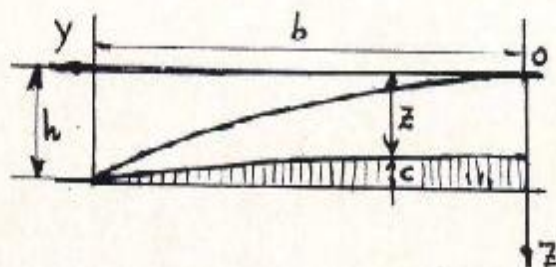


FIGURA 7

y reemplazando valores:

$$\bar{N}_y = -\frac{\gamma \delta \sqrt{1 + \frac{x^2}{25} \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right)^2 + \frac{y^2}{400} \left( 1 - \frac{x^2}{25} \right)^2}}{\frac{1}{20} \left( 1 - \frac{x^2}{25} \right)}$$

$$= \frac{0,125 \cdot \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{y^2}{100} \right)}{\frac{1}{20} \left( 1 - \frac{x^2}{25} \right)}$$

Esta expresión se satisface para infinitos pares de valores  $\delta$  y  $\bar{N}_y$ . Pero para cumplir las hipótesis adoptadas,  $\bar{N}_y$  debe ser independiente de  $y$  y además  $\delta$  debe ser mayor o igual que el mínimo admisible.

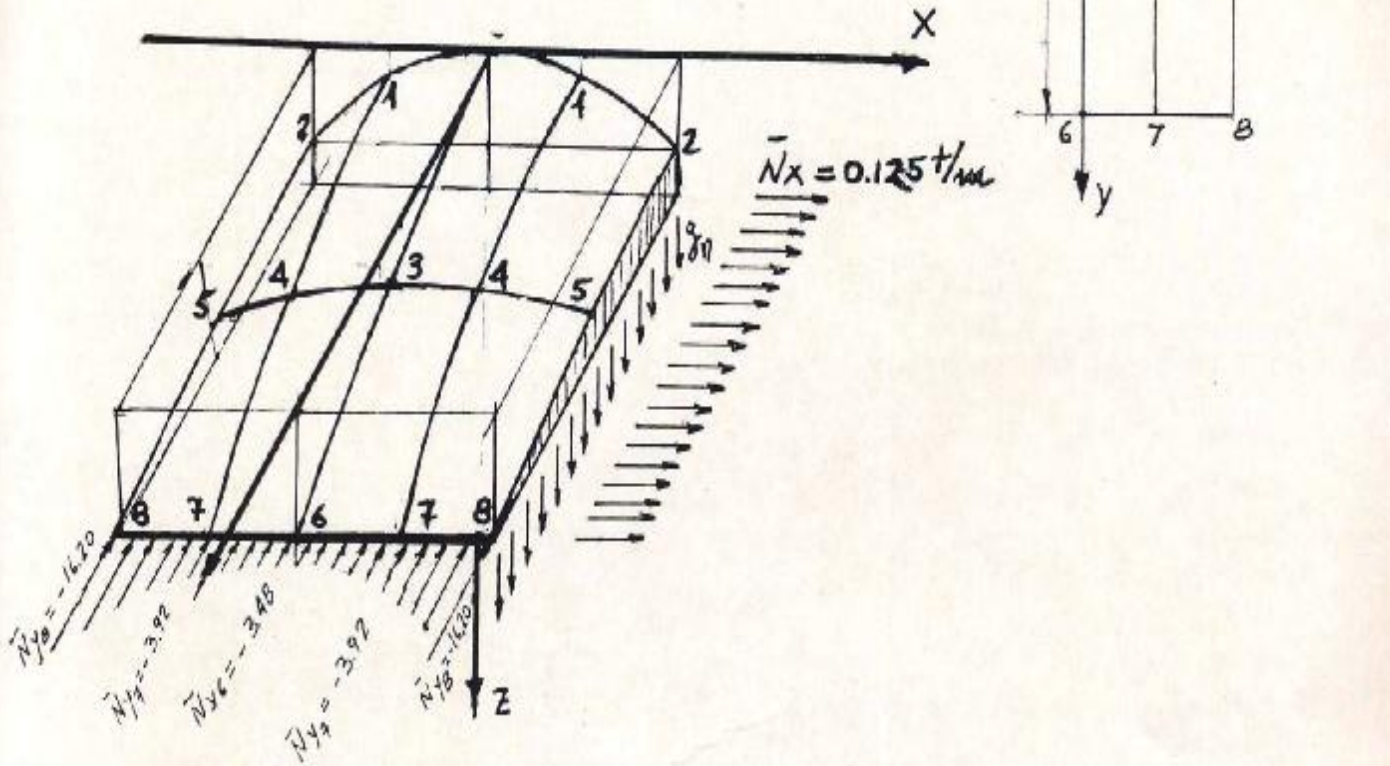
Para la confección del cuadro siguiente se ha procedido del modo que a continuación se detalla:

Fijado un valor de la abscisa  $x$  y un espesor  $\delta$ , se calcula  $\bar{N}_y$  con un valor cualquiera de  $y$ . Para la misma abscisa  $x$ , con el  $\bar{N}_y$  hallado y considerado constante, se han calculado los diversos valores de  $\delta$  al variar  $y$ . Si el espesor resultara en algún punto inferior al admisible, se recomienza la operación partiendo de un  $\delta$  inicial mayor que el primero adoptado.

Aunque el presente trabajo no pretende abordar el estudio de las deformaciones, es oportuno destacar que las fibras 0-3-6 y 2-5-8 (o cualquier otra paralela a éstas) tienen muy diferente comportamiento elástico. En efecto, bajo la acción de los esfuerzos  $N_y$  que las solicitan en forma axial, ambas tienden a reducir su longitud, en proporción a sus respectivas tensiones de compresión. Pero la fibra central, mucho más poraltada, experimentará un descenso sensiblemente menor que la de borde. Como esta discontinuidad geométrica no es posible, se generarán esfuerzos cortantes, (y por ende momentos flectores), que tenderán a eliminarla, y que de ningún modo pueden ignorarse en estructuras de dimensiones importantes.

Punto	x	y	z	$\delta$ (cm)	$\bar{N}_y$
0	0	0	0	6.-	-3,48
1	2,25	0	0,507	5.-	-3,92
2	4,50	0	2,02	4.-	-16,20
3	0	5.-	0,625	6,3	-3,48
4	2,25	5.-	0,403	5,3	-3,92
5	4,50	5.-	0,86	6,8	-16,20
6	0	10.-	2,50	6,5	-3,48
7	2,25	10.-	2,50	6.-	-3,92
8	4,50	10.-	2,50	6,4	-16,20

FIGURA 8



En la fig. 8 se muestra en forma esquemática la distribución de los esfuerzos a lo largo de los bordes de la membrana.

Las verdaderas tensiones generadas en la membrana,  $N_x$  y  $N_y$  se pueden ahora calcular en cada punto que se desee, mediante las conocidas fórmulas de desproyección:

$$N_x = \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} \bar{N}_x ; \quad N_y = \sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}} \bar{N}_y$$

### II) Membranas de bordes no paralelos a los ejes X-Y.

Agruparemos en este segundo tipo, a aquellas cáscaras cuyos bordes proyectados sobre el plano horizontal, sean segmentos de recta no paralelos a los ejes X-Y. En la fig. 9 supondremos que el segmento AB es la proyección de un borde de la membrana sobre el plano X-O-Y, siendo  $\alpha$  el ángulo formado por AB con el eje Y. Además  $X'$ ,  $Y'$  son las direcciones normal y paralela, respectivamente, a la dirección  $\alpha$ .

Recordando las fórmulas que definen las tensiones  $\bar{N}_x'y'$  y  $\bar{N}_x'$  según el ángulo  $\alpha$ , en función de las  $\bar{N}_{xy}$ ,  $\bar{N}_x$  que caracterizan la dirección de los ejes X-Y (\*):

$$\bar{N}_x' = \bar{N}_x \cos^2 \alpha + \bar{N}_y \sin^2 \alpha + 2\bar{N}_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (8)$$

$$\bar{N}_x'y' = -(\bar{N}_x - \bar{N}_y) \sin \alpha \cos \alpha + \bar{N}_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (9)$$

Estableceremos a continuación las condiciones que deben cumplirse para que un borde tal como AB se comporte como "borde libre", es decir que esté exento de todo esfuerzo, sea normal o de resbalamiento. En ese caso será:

$$\bar{N}_x' - \bar{N}_x'y' = 0$$

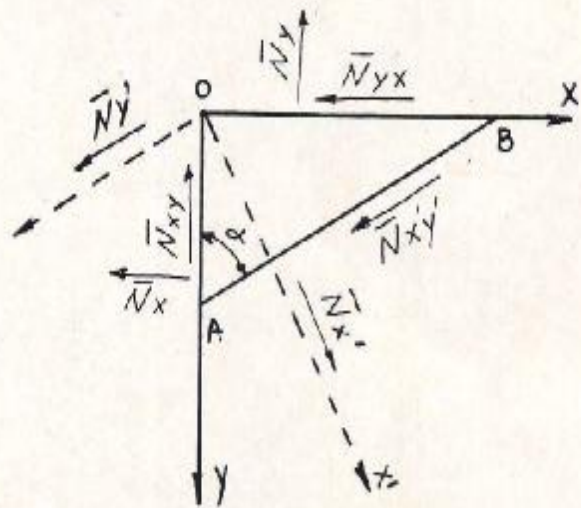


FIGURA 9

y en las (8) y (9) deberá verificarse:

$$\bar{N}_x = -\bar{N}_{xy} \cdot \operatorname{tg} \alpha ; \quad \bar{N}_y = -\frac{\bar{N}_{xy}}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (10)$$

Expresiones éstas que podemos reemplazar en la (8) obteniendo:

$$\delta = \frac{\bar{N}_{xy}}{\gamma} \left( \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{\eta}{\operatorname{tg} \alpha} - 2m \right) \quad (11)$$

La aplicación de la (11) libera al borde AB de la fig. 9, de todo esfuerzo. Las direcciones  $X'$  -  $Y'$  serán entonces direcciones principales y el segmento A-O-B de membrana se ve-

(\*) Las ecuaciones (8) y (9) corresponden a un estado plano de tensiones, y sólo expresan una relación entre magnitudes ficticias que, en general, no es cumplida por las magnitudes verdaderas correlativas, salvo cuando los parámetros adquieren determinados valores particulares. Pueden usarse estas ecuaciones en reemplazo de las exactas, con tanta mayor aproximación, cuanto más pequeños sean los valores absolutos de p y q. (cáscaras aplanadas).

rá solicitado sólo en la dirección paralela al eje  $Y'$ , ya que en todo punto será:

$$\bar{N}_{x'} = 0 ; \bar{N}_{x'y'} = 0$$

Dicho de otro modo, la expresión (10) faculta al proyectista a elegir las isostáticas, mediante la elección del ángulo  $\alpha$ . La estructura se comportará como un haz de arcos —traccionados o comprimidos— todos ellos contenidos en planos paralelos a  $y'$ . Como es evidente, estas afirmaciones son igualmente válidas para el caso de que AB no sea el borde de la cáscara sino una dirección arbitraria.

Agreguemos que, dado que la cantidad entre paréntesis que figura en la ecuación (11), se anula en general para las direcciones  $\alpha_0$  tales que:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{r}$$

no siempre será posible la obtención de bordes libres, si sus direcciones no se eligen acertadamente para la región y el tipo de superficie consideradas.

Las relaciones (10) se pueden escribir también de la siguiente forma:

$$\bar{N}_x = \bar{N}_y \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (12)$$

$$\bar{N}_{xy} = -\bar{N}_y \operatorname{tg} \alpha \quad (13)$$

que introducidas en (6):

$$\delta = -\frac{\bar{N}_y}{\gamma} (\varepsilon \operatorname{tg}^2 \alpha + \eta - 2m \operatorname{tg} \alpha) \quad (14)$$

**Ejemplo N° 5.** Paraboloide elíptico de planta romboidal, sujeto a las siguientes condiciones: (fig. 10)

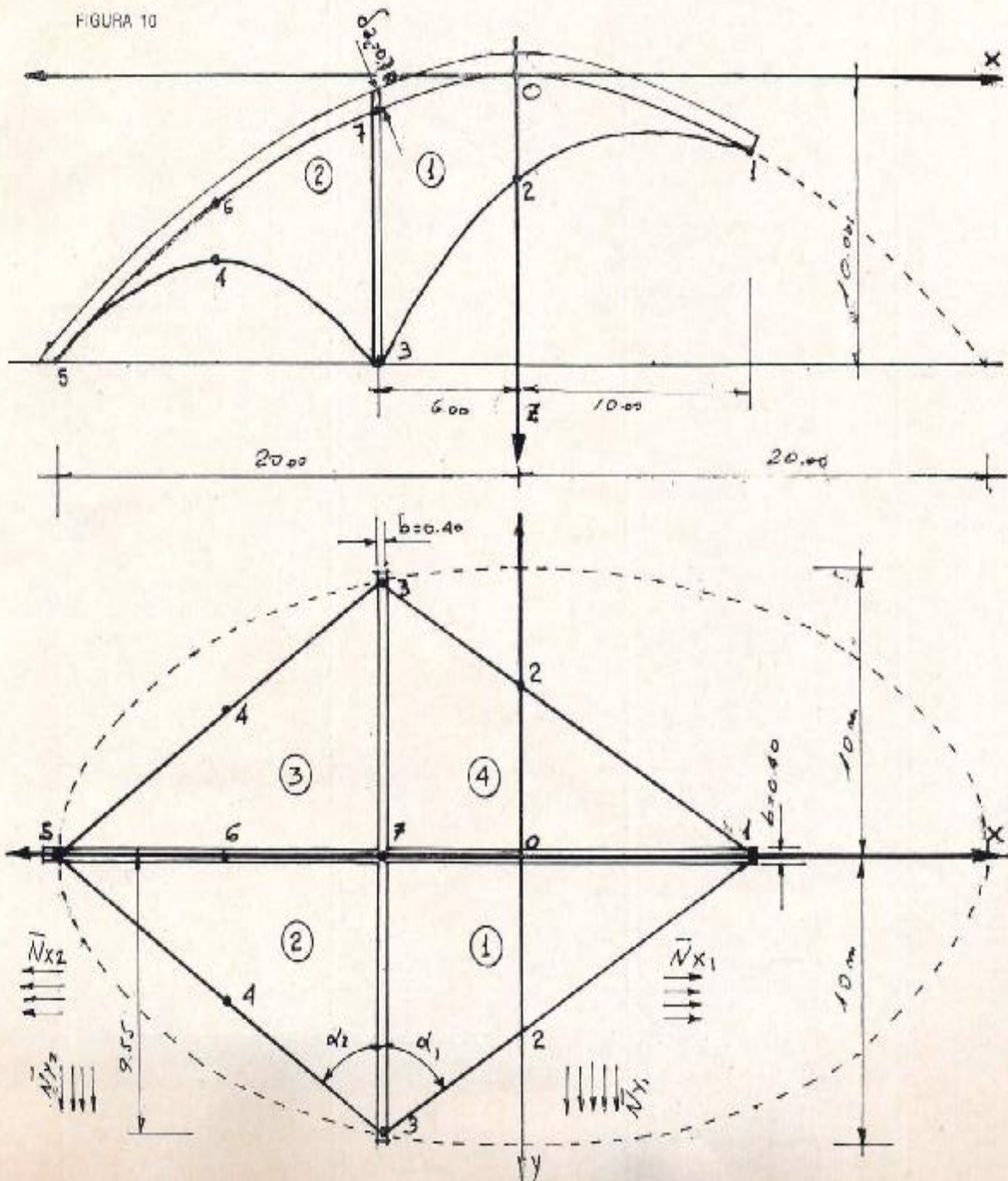
a) Los cuatro bordes deberán estar libres de todo esfuerzo proveniente de la membrana, prescindiéndose por lo tanto de las nervaduras de borde.

b) La cáscara quedará soportada por dos arcos rígidos normales entre sí, cuyos extremos coinciden con los vértices del romboide. El peso propio de estos arcos no debe introducir perturbaciones en el régimen membranar supuesto. Esta condición no excluye, claro está, las perturbaciones debidas a las deformaciones que sufren dichos arcos, por estar sometidos a importantes momentos flectores. Pero este efecto indeseable, puede atenuarse en la medida en que las secciones proyectadas sean suficientemente robustas, y de ahí la importancia que merece la consideración del peso propio.

Son datos, entonces, la ecuación de la superficie:

$$z = \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10}$$

FIGURA 10



y las coordenadas de los vértices del romboide:

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 ; y_1 = 0 \\ x_5 &= -20 ; y_5 = 0 \\ x_3 &= -6 ; y_3 = \pm 9,55 \end{aligned}$$

en consecuencia los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tendrán por tangentes:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{16}{9,55} = 1,68 ; \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{14}{9,55} = 1,47$$

Derivando z se obtiene:

$$\begin{aligned} p &= \frac{x}{20} ; r = \frac{1}{20} \\ q &= \frac{y}{5} ; t = \frac{1}{5} \end{aligned} \quad s = 0$$

Con estos valores la ecuación (14) resulta:

$$\delta = -\frac{1}{2,4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25}}} (1,68^2 \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{5}) \bar{N}_y$$

$$\delta_1 = -\frac{0,142}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25}}} \bar{N}_{y_1} = -\mu_1 \bar{N}_{y_1}$$

El sub-índice 1 que afecta a los parámetros, indica que los mismos corresponden al cuadrante señalado en la fig. 10

con el número 1. Conviene recordar que los cuatro cuadrantes pueden resolverse como cáscaras independientes entre sí, y el conjunto de valores que arroje el cálculo para cada uno de ellos será distinto del de los demás. Si conviniera, como efectivamente ocurre en nuestro caso, alguno de los parámetros puede trasladarse como dato al cuadrante contiguo, de la manera que se verá más adelante.

#### Cuadro de valores - Cuadrante N° 1

Punto	x	y	$\mu$	$\delta_1$ (cm)	$\bar{N}_{x_1}$	$\bar{N}_{x_2}$	$\bar{N}_{xy_1} - \bar{N}_y \operatorname{tg} \alpha_1$
0	0	0	0,142	8,7	t/m	t/m	t/m
1	10	0	0,127	7,8			
2	0	5,95	0,095	5,8			
3	-6	9,55	0,065	4,-	-0,615	-1,73	1,03
7	-6	0	0,136	8,4			

Para resolver el cuadrante N° 2 impondremos la condición:

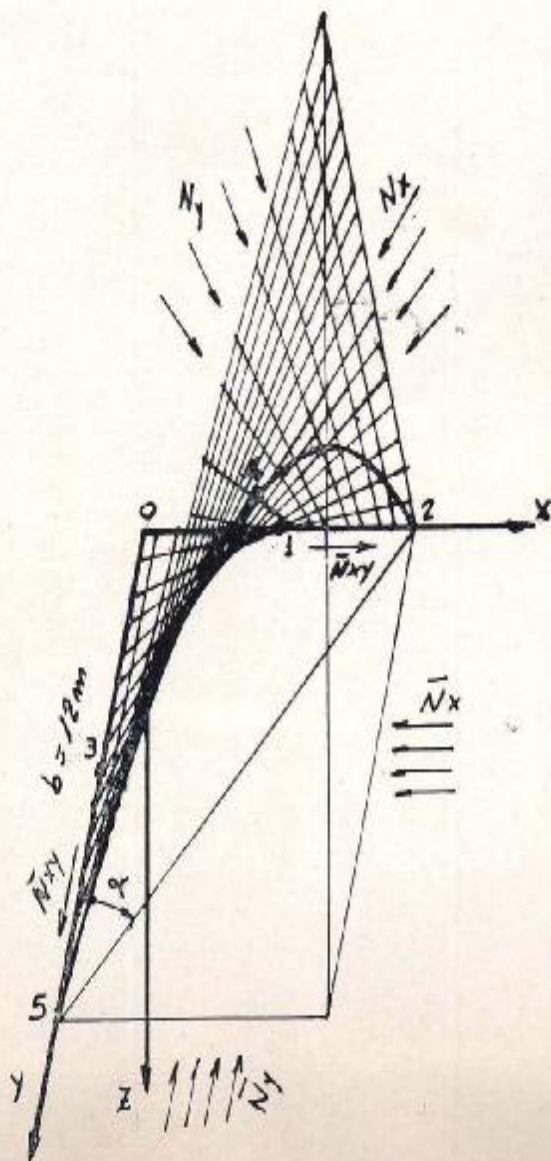
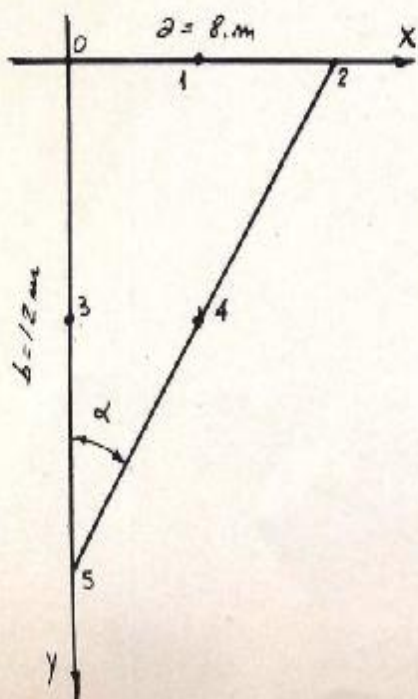
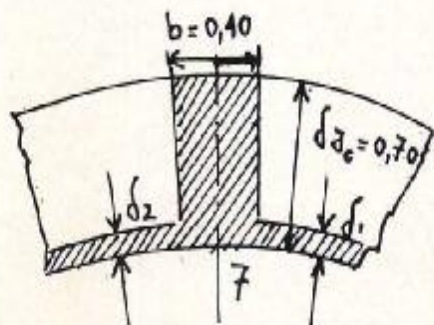
$$\bar{N}_{x_1} = \bar{N}_{x_2} = -1,73 \text{ t/m}$$

con lo cual el arco de sustentación correspondiente a la diagonal menor del romboide, quedará libre de las cargas que lo sollicitarian de no cancelarse entre sí los esfuerzos normales actuantes sobre el mismo.

A su vez, y por aplicación de las ecuaciones (12) y (13) se tendrá:

$$\bar{N}_{y_1} = \frac{\bar{N}_{x_2}}{\operatorname{tg} 2\alpha_2} = \frac{-1,73}{1,47^2} = -0,80 \text{ t/m}$$

$$\bar{N}_{xy_2} = -\bar{N}_{y_2} \operatorname{tg} \alpha_2 = -(-0,80) \cdot 1,47 = 1,17 \text{ t/m}$$





Los espesores  $\delta_2$  del segundo cuadrante se obtienen en forma directa mediante la expresión (14):

$$\delta_2 = \frac{(-0,80) \left(1,47^2 \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{5}\right) + 0,103}{2,4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25}} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25}}}$$

Los valores que arroja esta fórmula se resumen en el siguiente cuadro:

Cuadro de valores - Cuadrante Nº 2

Punto	x	y	$\delta$ (cm)
3	-6.—	9,55	4,7
4	-13.—	4,77	6,7
5	-20.—	0.—	7,3
6	-13.—	0.—	8,7
7	-6.—	0.—	9,9

Para abordar el punto b) de este ejemplo, serán datos: (fig. 11) Ancho de los nervios  $b = 0,40$  m

Altura en la clave  $\delta_{a_0} = 0,70$  m (corresponde al punto Nº 7). Consideremos en primer término el arco coincidente con la diagonal menor.

Si pensamos a este arco como perteneciente al sector de cáscara que se extiende hacia su derecha en el dibujo, y recordando la expresión general (6) para la superficie que nos ocupa ( $m = 0$  por ser  $s = 0$ ):

$$\delta_a = -\frac{1}{\gamma} (\epsilon \cdot \bar{N}_{x_a} + \eta \cdot \bar{N}_{y_a})$$

El sub-índice a identifica a los parámetros correspondientes al arco.

El esfuerzo  $\bar{N}_{x_a}$  viene impuesto por la membrana y no es otro que el ya calculado:

$$\bar{N}_{x1} = -1,73 \text{ t/m}$$

entonces, reemplazando valores:

$$\delta_a = -\frac{1}{2,4} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25}}} \left[ \frac{1}{20} (-1,73) + \frac{1}{5} \bar{N}_{y_a} \right]$$

y en el punto Nº 7 con  $x = -6$ —;  $y = 0$  y  $\delta_a = \delta_{a_0} = 0,70$  m será:

$$\bar{N}_{y_a} = -8,35 \text{ t/m}$$

que es prácticamente constante en todo el ancho  $b$  del nervio y que introducido en la ecuación anterior y operando:

$$\delta_a = \frac{0,73}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{25}}}$$

conduce a los siguientes espesores del arco:

x	y	$\delta_a$ (m)
-6.—	0	0,70
-6.—	4	0,65
-6.—	7	0,42
-6.—	9,55	0,33

Por el mismo camino puede resolverse el arco restante, con la sola precaución de incluir en la fórmula correspondiente el valor de  $\bar{N}_{y_0}$  o bien el de  $\bar{N}_{y_1}$ , ya sea se consideren puntos a la derecha de la clave o a su izquierda, respectivamente.

**Ejemplo Nº 6** - Paraboloide hiperbólico de borde curvo no paralelo a los ejes coordenados. (figuras 12 y 13).

Repetiendo las operaciones del ejemplo anterior tendremos:

$$z = -\frac{xy}{4}; a = 8 \text{ m.}; b = 12 \text{ m.}; \text{tg} \alpha = \frac{8}{12} = 0,666$$

Derivando:

$$p = -\frac{y}{4}; r = 0; \epsilon = 0$$

$$q = -\frac{x}{4}; t = 0; n = 0$$

$$s = -\frac{1}{4}$$

$$\delta = -(-2 \text{ m} \cdot \text{tg} \alpha) \frac{\bar{N}_y}{\gamma} = -2 \cdot 0,666 \cdot X$$

$$X = \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}}} \frac{\bar{N}_y}{2,4}$$

$$\delta = \frac{-0,555}{\sqrt{16 + x^2 + y^2}} \bar{N}_y = -\mu \bar{N}_y$$

Punto	x	y	z	$\mu$	$\delta$ (cm)	$\bar{N}_y$ t/m	$\bar{N}_x$ t/m	$\bar{N}_{xy}$ t/m
0	0	0	0	0,139	12,6			
1	4	0	0	0,098	8,9			
2	8	0	0	0,062	5,6			
3	0	6	0	0,077	7.—	-0,91	-0,402	0,605
4	4	6	6	0,057	5,2			
5	0	12	0	0,044	4.—			

**Ejemplo Nº 7** - Membrana de borde libre de forma irregular.

Si la proyección horizontal del borde considerado presenta forma irregular, es posible resolver el problema mediante la aplicación de las expresiones (6) y (11) recurriendo al siguiente procedimiento gráfico: (fig. 14)

Podremos por ejemplo, determinar el espesor  $\delta_p$  en un punto genérico P, adoptando para toda la superficie un valor cualquiera de  $\bar{N}_{xy}$  (puede ser igual a la unidad) y que en la figura está representando por el segmento KL. Si a partir de K se trazan KI y KJ, de direcciones paralela y perpendicular, respectivamente, a las tangentes b-b y a-a trazadas por los puntos B y A del borde, quedarán determinados los segmentos LI y LJ de modo que:

$$LI = \bar{N}_{y_p}; LJ = \bar{N}_{x_p}$$

como se deduce fácilmente de la figura, recordando las ecuaciones (10), que, además permiten determinar los respectivos signos. Con los valores así conocidos de las tensiones en el punto P, se puede calcular  $\delta_p$  con ayuda de la (6). Un punto tal como el Q, de abscisa igual al P, estará sometido a un esfuerzo normal  $\bar{N}_y$ , tal que:

$$\bar{N}_{y_0} = \bar{N}_{y_p}$$

dado que  $\bar{N}_y$  no puede ser función sino de la variable x. En cambio  $\bar{N}_{x_0}$  será en general distinto a  $\bar{N}_{x_p}$ , dependiendo ello de la tangente trazada al contorno en el punto C, de igual ordenada que Q.

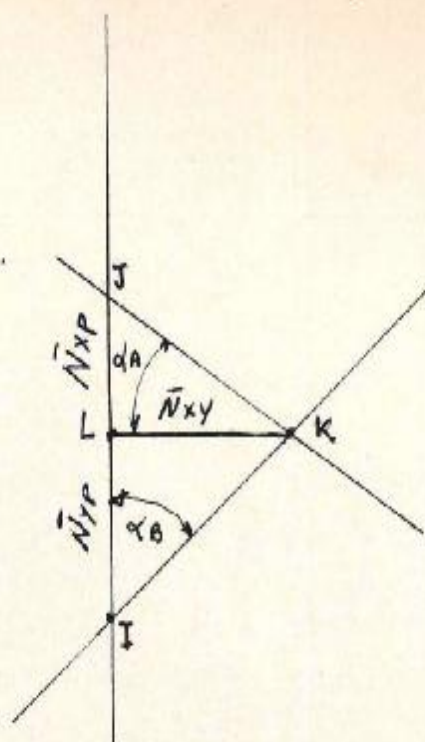
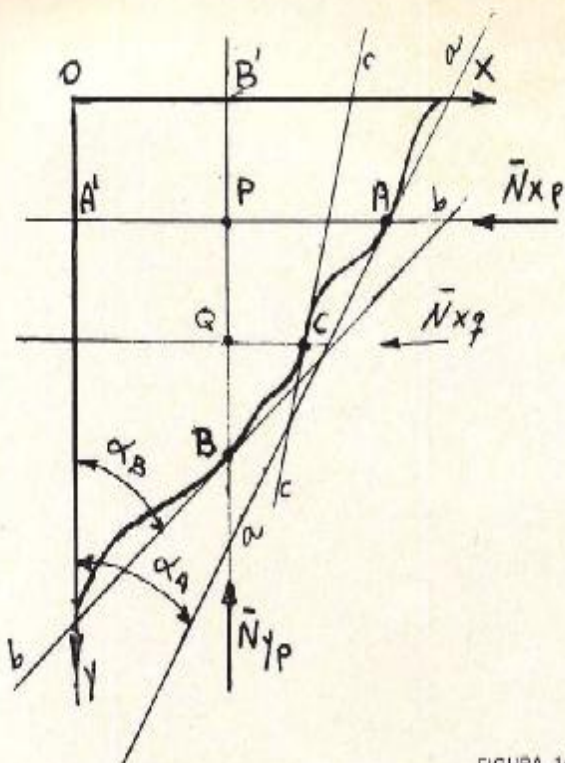


FIGURA 14

De igual manera se pueden hallar los espesores en todos los puntos que se deseen pero considerando que no son sino valores proporcionales a los definitivos, que corresponden al supuesto  $\bar{N}_{xy} = 1$ .

Las verdaderas magnitudes buscadas son fácilmente calculables por simple proporcionalidad, en virtud de la relación lineal entre  $\delta$ ,  $\bar{N}_x$ ,  $\bar{N}_y$  y  $\bar{N}_{xy}$  que establece la ecuación (6).

### III) Cáscaras de revolución.

Si bien la expresión (6) es completamente general y puede ser aplicada a las cáscaras de revolución, algunas simplificaciones se pueden obtener si se consideran las siguientes particularidades:

1) La simetría de la estructura, supuesta sometida también a cargas simétricas exige:

$$\bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx} = 0$$

2) En muchos casos, las formas implícitas de las funciones  $z = f(x, y)$  conducen a operaciones matemáticas más breves. En efecto, si una curva gira en torno del eje vertical Z, en los planos horizontales que interceptan la superficie generada se verifica:

$$x^2 + y^2 = R_x^2$$

siendo  $R_x$  el radio de la circunferencia descrita por cada punto de la curva, que es función de z:

$$R_x^2 = \varphi_x = x^2 + y^2$$

o sea:

$$\varphi_x - x^2 - y^2 = 0 = F(x, y, z)$$

cuyas derivadas son:

$$p = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-2x}{\varphi_x'}$$

$$q = \frac{2y}{\varphi_x'} \quad r = \frac{1}{\varphi_x'} \sqrt{\varphi_x'^2 + 4\varphi_x}$$

y también:

$$r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

en la que reemplazando valores y operando:

$$r = \frac{2(\varphi_x'^2 - 2\varphi_x'' - x^2)}{\varphi_x'^3}$$

análogamente:

$$t = \frac{2(\varphi_x'^2 - 2\varphi_x'' - y^2)}{\varphi_x'^3}$$

y llamando:

$$\omega = \frac{r}{r+t} \quad (15)$$

resulta, con los valores ya hallados:

$$\omega = \frac{\sqrt{\varphi_x'^2 + 4\varphi_x}}{4\left(1 - \frac{\varphi_x'' \varphi_x}{\varphi_x'^2}\right)} \quad (16)$$

Si ahora hacemos:

$$\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$$

y reemplazamos en la ecuación (6) obtendremos:

$$\delta = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{r+t}{r} \right) \bar{N} = -\frac{1}{\gamma \omega} \bar{N} \quad (17)$$

El significado físico de hacer  $\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$  conjuntamente con la condición:  $\bar{N}_{xy} = 0$ , se puede deducir de las fórmulas

(8) y (9), en la cuales resultará que  $\bar{N}_x$  es constante para cualquier dirección que se elija, al mismo tiempo que resulta nulo  $N_x y'$ .

En la fig. 15 se ha representado en planta y corte una membrana de revolución, supuesta apoyada en su contorno mediante el

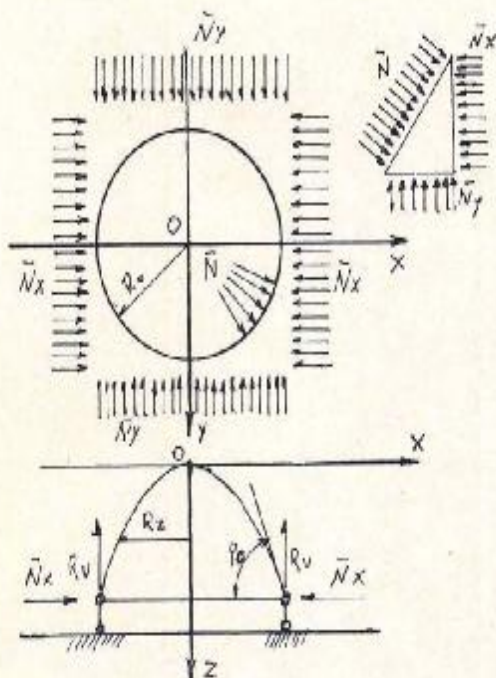


FIGURA 15

mecanismo indicado, que sólo permite el libre desplazamiento radial del anillo de base. Si, de acuerdo con las hipótesis adoptadas, aplicamos a la base las cargas uniformemente distribuidas:

$\bar{N}_x = \bar{N}_y = \bar{N}$ , ello equivaldrá a solicitar todo el perímetro de apoyo con la carga radial constante  $\bar{N}$ , que también representa la proyección horizontal del esfuerzo membranar para todo punto y dirección considerada.

La aplicación de la carga radial  $\bar{N}$  se puede materializar con sencillez, mediante la puesta en tensión de la armadura del anillo de base, con un esfuerzo:

$$V = \bar{N} \cdot R_0$$

donde  $R_0$  es el radio de dicho anillo. A su vez la membrana reaccionará con un esfuerzo unitario de compresión:

$$N = N_x = N_y = \frac{\bar{N}}{\cos \rho}$$

y el haz de bielas que sirve de soporte a la estructura deberá transmitir a su fundación, una carga distribuida vertical  $G$  tal que:

$$G = \bar{N} \operatorname{tg} \rho,$$

#### Ejemplo Nº 8

La superficie esférica de ecuación:  $R^2 - z^2 = x^2 + y^2 = \varphi_x$

tiene un radio  $R = 20$  m. y un ángulo de apertura máximo  $\rho_0 = 65^\circ$ . Las derivadas sucesivas de  $\varphi_x$  son:

$$\varphi'_x = -2z ; \quad \varphi''_z = -2 ;$$

que reemplazadas en (16):

$$\omega = \frac{\sqrt{4z^2 + 4R^2 - 4z^2}}{4 \left( 1 + \frac{2(R^2 - z^2)}{4z^2} \right)} = \frac{2Rz^2}{2(z^2 + R^2)} - \frac{R \cos^2 \rho}{1 + \cos^2 \rho}$$

Si adoptamos  $\delta_{\min} = 0,04$  m. de la expresión (17) obtendremos:

z (m)	$\rho^\circ$	$\omega$ (m)	$\delta$ (cm)	$\bar{N}$ (t/m)
- 20.—	0	10.—	4.—	
- 17,32	30	8,56	4,6	- 0,96
- 10.—	60	4.—	10.—	
- 8.—	65	3,04	13.—	

La armadura del anillo de base deberá ser puesta en tensión con un esfuerzo:

$P = 0,96 \cdot 18,10 = 17,4$  t., siendo  $R_0 = 18,10$  m. el radio de dicho anillo.

Toda la estructura resulta así comprimida para cualquier dirección que se elija y la deformación impuesta por el anillo postensado, es perfectamente coherente con la contracción radial que sufren los planos paralelos contiguos al mismo. Si esta misma cúpula se construyese con espesor uniforme, como es sabido, todo paralelo ubicado por debajo del ángulo de apertura  $51^\circ 49'$  quedaría sometido a esfuerzos de tracción, y la puesta en tensión del anillo de base generaría deformaciones en contradicción con el estado membranar, y por ende, momentos flectores.

#### Ejemplo Nº 9

Cáscara de contorno arbitrario, suspendida del mismo:

La fig. (16 a) representa un sector de paraboloides de revolución limitado por su intersección con un plano normal al plano del dibujo, y cuya traza sobre el mismo es el segmento AB. La fig. 16 b, es la proyección de dicha superficie sobre el plano x-y. La ecuación que define la superficie elegida es:

$$\varphi_x = -45z - x^2 + y^2$$

y por lo tanto:

$$\varphi'_x = -45.— \quad \text{y} \quad \varphi''_x = 0$$

de donde:

$$\omega = \frac{\sqrt{45^2 - 4 \cdot 45 \cdot z}}{4} = 11,25 \sqrt{1 - 0,088z}$$

expresión con la cual se ha calculado el cuadro siguiente:

Punto	x	z	$\omega$	$\delta$ (cm)	$\bar{N}$ t/m
0	0	0	11,25	6,6	
1	3	-0,2	11,26	6,6	
2	6	-0,8	11,90	6,3	
3	9	-1,8	12,40	6.—	$\bar{N} = 1,8$ t/m (trac.)
4	12	-3,2	13,00	5,7	
5	15	-5,0	13,50	5,5	
6	20	-8,9	15.—	5	

La cáscara resulta sometida a un esfuerzo de tracción  $\bar{N}$  —proyección horizontal del verdadero esfuerzo de membrana— que es uniforme para todo punto y dirección, e independiente

de la forma de su contorno. Aún para una planta como la indicada en línea punteada en la fig. 16 b, los respectivos espesores  $\delta$  y los valores de  $\bar{N}$ , son los mismos que se han calculado, siempre que los bordes puedan admitir los esfuerzos normales correspondientes.

Los círculos concéntricos de centro O trazados de la misma figura, representan líneas que unen puntos de igual espesor, por ser  $z = \text{cte}$ .

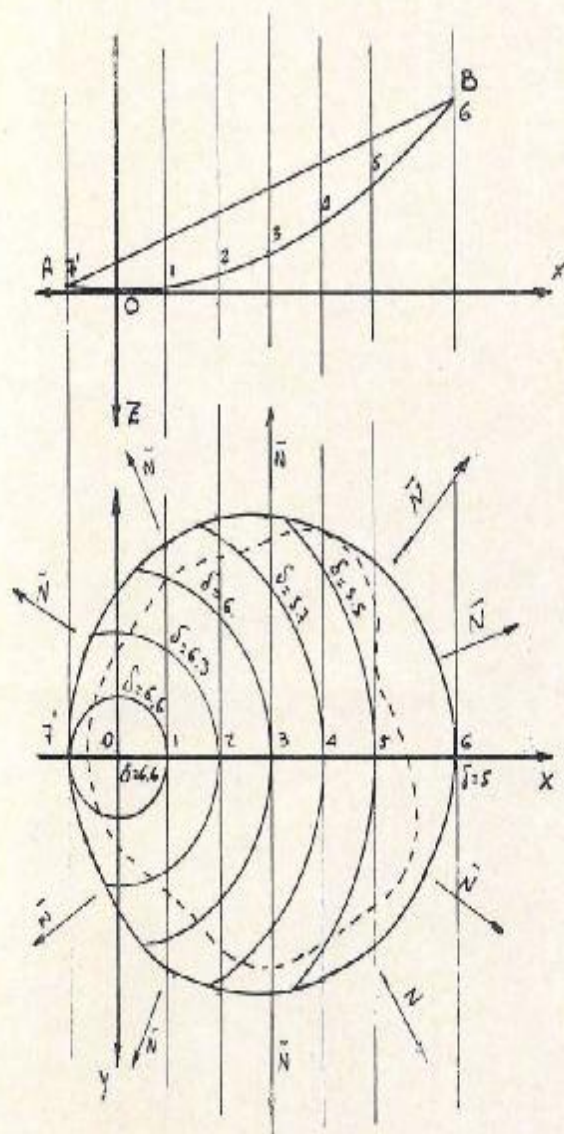


FIGURA 16

#### Agradecimientos

No pocas modificaciones introducidas en la versión original del presente artículo, se deben a las oportunas críticas formuladas por el Ing. Oscar A. Andrés, a quien agradezco sinceramente.

También deseo expresar mi reconocimiento al Ing. M. D. Altman, por la discusión de algunos temas relativos a este trabajo.

#### Bibliografía.

- Faber C., Las estructuras de Candela. C.E.C.S.A. México - 1970.  
 V. Murashev - E. Sigalov - V. Balkov., Desing of Reinforced concrete structures. Mir publishers - Moscú - 1968.  
 Olivera López A. - Ontálisis cálculo y diseño de las Bóvedas de Cáscara - C.E.C.S.A. México - 1969.  
 Margarit y Buxadé. Cálculo de estructuras en Paraboloides Hiperbólico. Madrid.  
 Tonda, J. A. y E., Paraboloides hiperbólicos. Limusa - Wiley S.A. México. 1972.  
 Pillarski L. I. - Cálculo de cascarones de concreto armado. - México. 1961.  
 Banerjee, S. P., Une méthode numerique pour le calcul des voiles ... - Béton Armé. Nº 24. 1960.  
 Andrés O. A. Membrane shells having the form of second order surfaces ... - IASS Bulletin, Nº 34. 1969.  
 Rey Pastor J., Cálculo infinitesimal. Bs. Aires. 1944.  
 Hütte. Manual del Ingeniero. Tomo I.  
 Pflüger A., Estática elemental de las cáscaras. EUDEBA. 1964.